מועד א', סמסטר חורף תש"ף - אלגברה 1/מ, 104016
9.2.20

ת"ז: | | | | | | | | | | פקולטה: | |

- משך המבחן: 3 שעות.
- השימוש בחומר עזר כלשהו ובמחשבונים אסור בהחלט.
- רישמו את כל תשובותיכם בדפים אלה. אפשר להשתמש בשני צידי הדף.
- **בשאלות 1-3** יש **לנמק** היטב כל תשובה. **תשובה לא מנומקת לא תחשב**.
  בשאלות 4-8 יש **לסמן את התשובה הנכונה בטבלה שבעמוד זה**. בכל שאלה יש רק סימון אחד נכון. אם תסומן יותר מתשובה אחת השאלה תיפסל.
- **אין לתת נימוקים בשאלות 4-8.**
- שאלת ש"ב (המהווה גם 5% מגן) היא 3-א'.

ב ה צ ל ח ה !

טבלה לסימון תשובות נכונות בשאלות 4-8

	שאלה 4	שאלה 5	שאלה 6	שאלה 7	שאלה 8
א.					
ב.					
ג.					
ד.					
ה.					

<u>שאלה מס' 1</u> : (24 נקודות)

תהי $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י :

$$T(a,b,c,d)=\begin{pmatrix} a+b+d & b+c-d \\ -a-3b-2c+d & a+b+c \end{pmatrix}$$

א. (5 נק') מצאו בסיס ומימד לגרעין של T.

ב. (5 נק') מצאו בסיס ומימד לתמונה של T כך שכל מטריצה בבסיס זה היא מטריצה הפיכה.

ג. (5 נק') מצאו ב $\operatorname{Im}T$ מטריצה בעלת דטרמיננטה השווה ל- 18.

ד. (5 נק') יהי W מרחב המטריצות האנטי סימטריות הממשיות מסדר 2×2. הוכיחו כי $\mathbb{R}^{2\times 2}=\operatorname{Im}T\oplus W$.

ה. (4 נק') הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית את הטענה הבאה : אם U תת מרחב של $\mathbb{R}^{2\times 2}$ המקיים $\mathbb{R}^{2\times 2}=\operatorname{Im}T\oplus U$ אז $U=W$ (כאן W הוא תת המרחב מסעיף ד').

<u>שאלה מס' 2</u> : (20 נקודות)

יהי $V=\mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה לכל היותר 2 (כולל פולינום ה- 0), ויהי $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ האופרטור הלינארי המוגדר ע"י:

$$T(a+bx+cx^2)=(-2a+b-2c)+(-a-2c)x+(-a+b-3c)x^2 \ .$$

א. (3 נק') מצאו את המטריצה $[T]_E$ המייצגת את T לפי הבסיס הסטנדרטי הסדור של V $E=\{1,\ x,\ x^2\}$.

ב. (9 נק') מצאו בסיס סדור B של V כך ש- $[T]_B$ אלכסונית. מצאו גם את $[T]_B$.

ג. (4 נק') הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: קיים בסיס S של V כך ש

$$[T]_S=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 7\\ -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}?$$

ד. (4 נק') נסמן ב- A את המטריצה מסעיף א'. מצאו את $\det\left(A^3+2A+5I\right)$.

בשאלה זו יש לתת פתרון מלא ובסוף לרכז את התשובות במשבצות המתאימות בסוף השאלה.

א.

$[T]_E =$

ב. בסיס B של V:

$[T]_B =$

ג. קיים / לא קיים בסיס S כי:

ד. $[T]_E = A$

$\det\left(A^3 + 2A + 5I\right) =$

<u>שאלה מס' 3</u> : (31 נקודות) **סעיף א' בשאלה זו מהווה שאלת ש"ב.**

בשאלה זו 4 סעיפים. הוכיחו את הטענות הבאות או הפריכו ע"י דוגמא נגדית:

א. (10 נק') אם $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ אופרטור ליניארי המקיים $T^2 = 0$ אז $\mathrm{Ker}(T) \subseteq \mathrm{Im}(T)$.

ב. (7 נק') יהי $V = R_6[x]$ מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה לכל היותר 6 (כולל פולינום ה- 0),

ויהיו U_1, U_2, U_3 שלושה תת מרחבים של V ממימד 5 כל אחד, אז $\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) \geq 1$.

ג. (7 נק') אם $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ומקיימות $rank(AB) \neq rank(BA)$, אז A ו- B לא הפיכות.

ד. (7 נק') יהיו $A,\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ בעלות אותו פולינום אופייני. אם A לכסינה אז גם B לכסינה.

<u>יש לסמן את התשובה הנכונה לשאלות 4-8 בטבלה שבדף הראשון. נימוקים לא יבדקו.</u>
<u>יותר מסימון אחד יגרור ניקוד 0 על השאלה.</u>

<u>שאלה מס' 4</u> : (5 נקודות)

בין פתרונות המשוואה $z^4=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$ קיימים שני פתרונות z_1, z_2 המקיימים :

א. $z_1=\overline{z_2}$.

ב. $z_1+z_2<0$.

ג. $z_1^3=z_2$.

ד. $z_1^2-z_2=-1$.

ה. $z_1+z_2=1$.

<u>שאלה מס' 5</u> : (5 נקודות)

תהי $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&a&b&c\\-2&d&e&f\\3&g&h&k\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times4}$. נתון כי מספר המשתנים החופשיים במערכת $A\overline{x}=0$ גדול ממספר המשתנים התלויים. אזי :

א. מימד מרחב הפתרונות של $A\overline{x}=0$ הוא 1.

ב. $trace(A)=0$.

ג. A לכסינה.

ד. $A-9I$ היא מטריצה הפיכה.

ה. לכל $v\in\mathbb{R}^4$ למערכת $A\overline{x}=v$ יש אינסוף פתרונות.

<u>שאלה מס' 6</u> : (5 נקודות)

תהי $A\in F^{4\times4}$ המקיימת $\det(adj(A))=1$ אזי :

א. $F=\mathbb{R}$.

ב. $A\cdot adj(A)=I$.

ג. A לא הפיכה.

ד. אם $\det(A)\neq1$ אז $F=\mathbb{C}$.

ה. $\det(A^5)=1$.

שאלה מס' 7 : (5 נקודות)

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, ויהי $B=\{v_1,v_2\}$ בסיס סדור של V. יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי המוגדר ע"י:

$$T(v_1)=4v_1-6v_2$$
$$T(v_2)=6v_1-9v_2$$

יהי $S=\{2v_1-v_2\,,\,7v_1-3v_2\}\subset V$ בסיס סדור נוסף של V אזי:

א. $[T]_S=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 6 & -9\end{pmatrix}$.

ב. $[T]_S=\begin{pmatrix}-20 & -5\\ 60 & 15\end{pmatrix}$.

ג. $[T]_S=\begin{pmatrix}15 & 75\\ -4 & -20\end{pmatrix}$.

ד. $[T]_S=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 7 & -3\end{pmatrix}$.

ה. אין מספיק נתונים למציאת $[T]_S$.

שאלה מס' 8 : (5 נקודות)

תהי $A\in\mathbb{C}^{3\times 3}$ נתונה ע"י:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

אזי:

א. ל- A יש ערך עצמי מריבוי אלגברי 3.

ב. $A^{2020}=A$.

ג. קיים $v\in\mathbb{C}^3$ שונה מ- 0 כך ש- $Av=0$.

ד. A מטריצה אלמנטרית.

ה. A דומה למטריצת היחידה.

דף ריק למקרה הצורך